Interrogation n°8 – Espaces préhilbertiens (sujet A)

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application φ définie pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n\left[X\right]$ par :

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n\left[X\right]$.

Exercice 2. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. On suppose que

$$\forall x, y \in E \qquad (f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$$

où $(u \mid v)$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E.

1) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$.
2) En déduire que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$.

Exercice 3. Soit E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application quelconque (pas nécessairement linéaire). On suppose que

$$\forall x, y \in E \qquad (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

où $(u \mid v)$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E.

1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$, le vecteur $f(\lambda x) - \lambda f(x)$ est nul. On pourra utiliser la norme euclidienne.
2) Montrer que f est linéaire.

Interrogation n°8 – Espaces préhilbertiens (sujet B)

Exercice 1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle A \mid B \rangle = \operatorname{Tr}\left(A^\top B\right)$$

1) En explicitant $\left[A^\top B\right]_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, vérifier que pour toutes matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle A \mid B \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} A_{i,j} B_{i,j}$$

2) Montrer que $(A, B) \mapsto \langle A \mid B \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note H le s.e.v. des matrices de trace nulle.

3) Justifier que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4) Montrer que $\mathrm{Vect}(I_n) \subset H^\perp$.
5) En déduire que $H^\perp = \mathrm{Vect}(I_n)$.
6) On note U la matrice dont tous les coefficients valent 1. Décomposer U en la somme d'une matrice de H et d'une matrice de $H^\perp$.
7) En déduire la distance de la matrice U au s.e.v. H, notée $d(U, H)$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs tels que $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

1) Rappeler l'expression du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, qu'on notera $(\bullet \mid \bullet)$.
2) Rappeler le résultat de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire pour deux vecteurs $y, z \in \mathbb{R}^n$.
3) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $x_1, \cdots, x_n$ pour qu'on ait égalité.